



## Penyelesaian Aplikasi Persamaan Diophantine dengan Algoritma Euclid

Yan Aditya Pradana<sup>1✉</sup>, Lenny Puspita Dewi<sup>2</sup>, Maulida Atsaniatu Rahmah<sup>3</sup>, Ardi Wijanarko<sup>4</sup>, Naufal Ishartono<sup>5</sup>, Dian Artha Kusumaningtyas<sup>6</sup>

<sup>1-4</sup>Fakultas Ilmu Formal dan Ilmu Terapan, Universitas Muhammadiyah Madiun, Indonesia

<sup>5</sup>Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Muhammadiyah Surakarta, Indonesia

<sup>6</sup>Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Ahmad Dahlan, Indonesia

✉Corresponding email: [yap764@ummad.ac.id](mailto:yap764@ummad.ac.id)

### Histori Artikel:

Submit: 2 Oktober 2023; Revisi: 27 November 2023; Diterima: 4 Desember 2023

Publikasi: 8 Desember 2023; Periode Terbit: Maret 2024

Doi: 10.23917/jkk.v3i1.173

### Abstrak

Persamaan diophantine Linier memiliki dua variabel yang mana variabelnya berbentuk bilangan bulat. Solusi yang dapat diselesaikan pada persamaan diophantine adalah solusi bilangan bulat. Untuk mengetahui apakah persamaan tersebut memiliki solusi bulat atau tidak maka diperlukan algoritma euclid untuk menyelidiki. Dengan algoritma Euclidean dicari Faktor persekutuan terbesar dari masing-masing variabel yang ada pada persamaan yang mana hasil dari penghitungan FPB ini merupakan solusi terbaik dari persamaan Linier Diophantine. Berdasarkan analisis hasil dan pembahasan yang telah dibahas, permasalahan pada aplikasi persamaan Diophantine Linier dapat secara mudah dilakukan dengan menggunakan algoritma Euclid. Untuk menyelidiki apakah persamaan tersebut diophantine atau tidak dapat dilakukan dengan dengan penghitungan FPB variabel  $a$  dan  $b$  dari persamaan  $ax + by = c$  yang mana  $(a,b)|c$ . Pada penghitungan  $FPB(a,b)$  didapat  $d|c$ , sehingga  $ax + by = c$  memiliki solusi bulat. Persamaan diophantine Linier dapat diaplikasikan dalam materi program Linier 2 variabel yang diajarkan di tingkat SMP dan SMA, dengan algoritma Euclid persamaan Linier dengan syarat  $(a,b)|c$  dapat dipenuhi yang kemudian dapat dilanjutkan langkah pembalikan algoritma euclid untuk menemukan solusi bulat.

**Kata Kunci:** pembelajaran matematika, persamaan diophantine, algoritma euclid

### Pendahuluan

Pembelajaran matematika merupakan salah satu mata pelajaran yang ditakuti oleh siswa (Rahmawanti et al., 2021; Sulistyaningrum et al., 2021). Salah satunya adalah persamaan diophantine. "Persamaan Diophantine adalah

persamaan polinomial yang umumnya melibatkan dua atau lebih variabel dengan solusi berupa bilangan bulat. Terdapat beberapa jenis persamaan Diophantine, salah satunya adalah persamaan Linier Diophantine, yang sering menjadi fokus dalam teori



bilangan. Kata "Diophantine" sendiri diambil dari nama Diophantus, seorang ahli matematika asal Alexandria yang mempelajari dan merumuskan teorema terkait persamaan linier (Everest & Ward, 2005; Pradana et al., 2022).

Dalam mempelajari operasi aljabar dibutuhkan sebuah kemampuan untuk memahami semua simbol-simbol, operasi dan aturan-aturannya (Kristanti et al., 2021). Persamaan Diophantine adalah persamaan aljabar dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien bilangan bulat, yang bertujuan untuk mencari solusi terbaiknya. Contoh dari persamaan Diophantine adalah  $x^n + y^n = z^n$ , yang merupakan teorema terakhir Fermat. Persamaan ini akan diselesaikan dengan menggunakan algoritma Euclid untuk mendapatkan solusi berupa bilangan bulat (Al-Kubro, 2019; Sukirman, 2006).

Persamaan linier adalah topik yang diajarkan dalam pembelajaran matematika di SMP kelas 8. Persamaan garis lurus merupakan representasi matematika dari pemetaan dalam bidang koordinat Cartesius yang membentuk grafik garis lurus. Terdapat dua variabel dalam persamaan garis lurus dan keduanya memiliki orde 1. Secara umum, persamaan garis lurus dapat dinyatakan dalam bentuk  $ax + by = c$  (Subiono, 2016)

Pada penyelesaian soal persamaan linier di tingkat sekolah menengah pertama dan sekolah menengah atas persamaan linier Diophantine diperlukan un-

tuk memudahkan siswa dalam menyelesaikan soal system persamaan linier dua variabel yang terkait dengan persamaan linier Diophantine (Dewi & Rahmawati, 2022).

### **Metode**

Bagian ini menjelaskan langkah-langkah pengerjaan tentang bagaimana menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan persamaan diophantine dengan menggunakan algoritma Euclid. Beberapa tahapan yang dilakukan adalah sebagai berikut:

#### **a. Pembahasan Mengenai Persamaan Diophantine Linier dan Algoritma Euclid.**

Bagian ini berisi penjelasan tentang bentuk umum suatu persamaan Diophantine Linier yang memiliki unsur bilangan bulat. Selanjutnya, untuk menyelesaikan persamaan Diophantine akan diulas mengenai algoritma Euclidean dan selanjutnya diberikan beberapa contoh. Aplikasinya dalam soal siswa SMP dan SMA.

#### **b. Penyajian langkah-langkah penyelesaian Kasus**

Pada bagian ini dibahas tentang bagaimana mendapatkan solusi dari persamaan Diophantine menggunakan algoritma euclidean. Dengan algoritma Euclidean dicari Faktor persekutuan terbesar dari masing-masing variable yang ada pada persamaan yang mana hasil dari penghitungan FPB ini merupakan solusi terbaik dari persamaan Linier Diophantine.

#### **c. Penarikan kesimpulan**



Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, bagian ini adalah bagian terakhir dari paper yang berisi tentang kesimpulan dari penelitian yang dibahas.

## Hasil dan Pembahasan

### a. Penjelasan Persamaan Diophantine Linier

Dalam mengerjakan persamaan linier peserta didik sering mengalami kesulitan dan kesalahan (Prabandari et al., 2022). Persamaan Linier Diophantine dalam dua variabel adalah persamaan Linier dalam bentuk  $ax + by = c$ , dengan  $a, b, c$  adalah bilangan bulat serta  $x, y$  adalah variabel-variabel sedemikian hingga solusi persamaan Liniernya merupakan bilangan bulat. Misalkan  $ax + by = c$  adalah persamaan Linier Diophantine. Jika  $(x_0, y_0)$  adalah pasangan bilangan bulat sehingga  $ax_0 + by_0 = c$ , maka  $(x_0, y_0)$  adalah solusi dari persamaan Linier Diophantine.

Guru harus mampu menyampaikan materi secara efektif, efisien, dan komprehensif (Ishartono, Ulya, et al., 2023). Oleh karena itu, diperlukan keterampilan dari guru dalam mengajarkan persamaan linier. Siswa berkemampuan rendah terbukti mengalami kesulitan dalam memahami konsep abstraksi dalam matematika (Hardini et al., 2021). Dalam pembelajaran matematika siswa harus mampu keterampilan dalam mengajukan permasalahan yang berkualitas tinggi (Christidamayani & Kristanto, 2020). Selain itu, guru perlu ada inovasi dalam pembelajaran agar siswa mudah

mengerti materi pelajaran (Lestari et al., 2023). Keterampilan guru dalam menyampaikan materi harus dilaksanakan secara efektif dan efisien, namun tetap tidak meninggalkan kebermanaknaan proses pembelajaran (Ishartono, Razak, et al., 2023). Perhatikan persamaan Linier Diophantine berikut:

$$14x + 12y = 33 \quad (1)$$

Misalkan persamaan ini mempunyai solusi  $(x_0, y_0)$ . Maka

$$14x_0 + 12y_0 = 33 \quad (2)$$

Perhatikan bahwa 2 membagi habis  $14x_0 + 12y_0$  tetapi 2 tidak membagi habis 33. Jadi persamaan Linier Diophantine  $14x + 12y = 33$  tidak mempunyai solusi berupa bilangan bulat.

**Teorema 1** Persamaan Linier Diophantine  $ax + by = c$  mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika  $FPB(a, b) | c$ .

Bukti :

Jika  $FPB(a, b) | c$ , maka  $ax + by = c$  memiliki solusi

Misalkan  $FPB(a, b) = d$ , berarti  $d | c$ , sehingga  $c = kd$ ,

$FPB(a, b) = d \Leftrightarrow$  terdapat  $m$  dan  $n$  sehingga  $am + bn = d$

Sehingga dapat ditulis

$$\Leftrightarrow a(km) + b(kn) = kd \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow a(km) + b(kn) = c \quad (4)$$

Diperoleh

$$x = mk \text{ dan } y = nk \quad (5)$$



Jika  $d = FPB(a, b)$  dan  $x_0, y_0$  penyelesaian persamaan Diophantine  $ax + by = c$  maka penyelesaian umum persamaan tersebut adalah

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)k \text{ dan } y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)k \quad (6)$$

dengan  $k$  parameter bilangan bulat

### **b. Persamaan Diophantine Non Linear**

Persamaan Diophantine tidak hanya linear, bisa saja kuadrat, kubik, atau lainnya.

Contohnya  $ax^2 + by^2 = c$ . Persamaan Diophantine bisa memiliki banyak solusi yang beragam, mulai dari 0 sampai tak hingga. Bentuk umum persamaan Diophantine adalah  $ax + by = c$  dengan  $a, b$  merupakan koefisien dan  $c$  merupakan konstanta bulat. Salah satu penyelesaian persamaan Diophantine adalah semua pasangan bilangan bulat  $(x, y)$  yang memenuhi persamaan  $ax + by = c$ . Jika  $d$  adalah faktor persekutuan terbesar (FPB) dari  $a$  dan  $b$ , maka agar persamaan  $ax + by = c$  mempunyai solusi maka  $d$  harus dapat membagi  $c$ .

Persamaan  $x^2 + y^2 = z^2$  dikenal dengan nama teorema Pythagoras, diantaranya :

3,4,5

6,8,10

5,12, 13

Dan sebagainya.

Definisi :

Jika  $(a, b, c)$  penyelesaian dari persamaan  $x^2 + y^2 = z^2$  dengan

$FPB(a, b, c) = 1$  maka penyelesaian tersebut dinamakan penyelesaian primitif.

*Lift skills* sangat diperlukan di era globalisasi ini agar dapat sukses di lingkungan sekolah maupun di luar sekolah (Setyaningsih et al., 2022). Siswa dengan rendah kemampuan pemecahan masalah akan mengalami kesulitan dalam menyelesaikan soal matematika yang memerlukan pemikiran tingkat tinggi (Darmawan & Suparman, 2019). Persamaan pythagoras memiliki baris tak hingga banyak penyelesaian. Dapat dibuktikan bahwa ada tak hingga banyak penyelesaian primitif. Dalam belajar matematika sering sekali mengalami kesulitan mengerjakan (Rahmawanti et al., 2021).

Diketahui  $(x, y, z)$  merupakan penyelesaian dari  $x^2 + y^2 = z^2$ . Nilai  $x, y$  tidak boleh keduanya genap atau keduanya ganjil. Jika keduanya genap berarti  $x, y, z$  dapat dibagi 2 sehingga kontradiksi dengan  $fpb(x, y, z) = 1$ . Jika keduanya ganjil maka  $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$  dan  $y^2 \equiv 1 \pmod{4}$  sehingga  $z^2 \equiv 2 \pmod{4}$ . Namun hal ini tidak mungkin, karena ada 2 kemungkinan yaitu nilai  $z$  genap ( $z \equiv 0 \pmod{4}$ ) atau  $z$  ganjil ( $z \equiv 1 \pmod{4}$ ).

Karena  $x$  dan  $y$  adalah simetris maka bisa dipilih salah satu penyelesaian primitifnya, yaitu  $x$  genap dan  $x$  ganjil.

### **c. Algoritma Euclid**

Algoritma Euclid biasa digunakan untuk menghitung FPB (gcd) dari dua



bilangan yang besar. Algoritma ini memudahkan dalam perhitungan FPB dari sembarang bilangan bulat, meskipun bilangan-bilangan bulat tersebut cukup besar. Everest dan Ward (2006: 36) menjelaskan algoritma Euclid sebagai berikut: Misalnya akan dicari pembagi persekutuan terbesar dari bilangan bulat  $a$  dan  $b$ . karena  $FPB(|a|, |b|) = FPB(a, b)$  dan misalkan  $a \geq b > 0$ . Langkah pertama menerapkan algoritma pembagian terhadap  $a$  dan  $b$  diperoleh

$$a = q_1b + r_1 \quad (7)$$

$$0 < r_1 < b$$

Jika terjadi  $r_1 = 0$  maka  $b|a$  dan  $ppt(a, b) = b$  Jika  $r_1 \neq 0$  dibagi  $b$  oleh  $r_1$  dan diperoleh  $q_2$  dan  $r_2$  yang memenuhi

$$b = q_2r_1 + r_2 \quad (8)$$

$$0 < r_2 < r_1$$

Jika  $r_2 = 0$  maka berhenti dan sebaliknya jika  $r_2 \neq 0$  dengan cara yang sama diperoleh

$$r_1 = q_3r_2 + r_3 \quad (9)$$

$$0 < r_3 < r_2$$

Proses pembagian ini dilanjutkan sampai sisa pembagian nol, katakanlah pada Langkah ke(n+1) yang mana  $r_{n-1}$  dibagi  $r_n$  dengan  $b > r_1 > r_2 > \dots \geq 0$ .

Proses di atas menghasilkan sistem persamaan sebagai berikut :

$$a = q_1b + r_1 \quad 0 \leq r_1 < b \quad (10)$$

$$b = q_2r_1 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1 \quad (11)$$

$$r_1 = q_3r_2 + r_3 \quad 0 \leq r_3 < r_2 \quad (12)$$

:

$$r_{n-2} = q_nr_{n-1} + r_n \quad 0 \leq r_n < r_{n-1} \quad (13)$$

$$r_{n-1} = q_{n+1}r_n + 0 \quad (14)$$

Sisa pembagian yang terakhir yang bukan nol  $r_n = FPB(a, b)$ .

Contoh :

1. Carilah FPB (5767, 4453)

Penyelesaian :

$$5767 = 1 \times 4453 + 1314,$$

maka

$$FPB\ 5767, 4453 = FPB(4453, 1314)$$

$$4453 = 3 \times 1314 + 511,$$

maka

$$FPB\ 4453, 1314 = FPB(1314, 511)$$

$$1314 = 2 \times 511 + 292,$$

maka

$$FPB\ 1314, 511 = FPB(511, 292)$$

$$511 = 1 \times 292 + 219,$$

maka

$$FPB\ 511, 292 = FPB(292, 219)$$

$$292 = 1 \times 219 + 73,$$

maka

$$FPB\ 292, 219 = FPB(219, 73)$$

$$219 = 3 \times 73 + 0,$$

maka

$$FPB\ 219, 73 = FPB(73, 0) = 73$$

$$\text{Jadi } FPB(5767, 4453) = 73$$

2. Tentukan penyelesaian umum persamaan diophantine  $738x + 621y = 45$

Penyelesaian :

$$738 = 1 \times 621 + 117$$

$$621 = 5 \times 117 + 36$$



$$117 = 3 \times 36 + 9$$

$$36 = 4 \times 9 + 0$$

Jadi  $(738, 621) = 9$ . Karena  $9|45$  maka persamaan di atas mempunyai penyelesaian

$$9 = 117 - 3 \times 36$$

$$9 = 117 - 3(621 - 5 \times 117)$$

$$9 = -3 \times 621 + 16(738 - 621)$$

$$9 = 16 \times 738 - 19 \times 621$$

$$m = 16 \text{ dan } n = -19$$

$$k = \frac{45}{9} = 5$$

Mengalikan kedua ruas dengan 5

$$45 = 80 \times 738 - 95 \times 621$$

Didapatkan

$$x_0 = 80 \text{ dan } y_0 = -95$$

Penyelesaian umumnya adalah

$$x = 80 + \left(\frac{621}{9}\right)k = 80 + 69k$$

$$y = -95 - \left(\frac{738}{9}\right)k = -95 - 82k$$

3. Tentukan bilangan bulat positif  $x$  dan  $y$  yang memenuhi  $7x + 5y = 100$

Penyelesaian :

$FPB(7, 5) = 1$ . Karena  $1 | 100$  maka persamaan di atas mempunyai penyelesaian.

$$1 = (3 \times 7) - (4 \times 5)$$

$$100 = 7 \times 300 + 5 \times (-400).$$

$$\text{Didapat } x_0 = 300 \text{ dan } y_0 = -400$$

Penyelesaian umumnya adalah :

$$x = 300 + 5k$$

$$y = -400 - 7k$$

Karena yang dicari adalah solusi positif maka haruslah

$$300 + 5k > 0 \text{ dan } -400 - 7k > 0,$$

$$\text{yaitu } -60 < k < -57\frac{1}{7}$$

Sehingga didapatkan  $k = -58$  dan  $k = -59$ . Jadi persamaan Diophantine  $7x + 5y = 100$  mempunyai tepat dua solusi positif yaitu  $x_1 = 10, y_1 = 6$  dan  $x_2 = 5, y_2 = 13$

4. Jane membeli 13 buah apel, 37 buah alpukat, seharga 200 \$ dengan menggunakan algoritma Euclid tentukan harga dari satu buah apel dan satu buah alpukat

Diketahui :

$$13x + 37y = 200$$

Dengan menggunakan Algoritma Euclid kita peroleh

$$37 = 1 \times 13 + 24$$

$$13 = 3 \times 11 + 2$$

$$11 = 5 \times 2 + 1$$

$$2 = 2 \times 1 + 0$$

Maka diperoleh  $FPB(13, 37) = 1$ . Karena 1 habis membagi 200, maka persamaan itu memiliki solusi bulat.

Dengan menggunakan pembalikan algoritma Euclid didapat

$$1 = 11 - 5 \times 2$$

$$1 = 11 - 5 \times (13 - 11)$$

$$1 = 6 \times 11 + 5 \times 13$$

$$1 = 6 \times (37 - 2 \times 13) + 5 \times 13$$





$$1 = 6x + 37 - 17x + 13$$

Kedua ruas dikalikan 200

$$200 = 1200x + 17 + 3400x + 13$$

Maka

$$x = -3400 \text{ dan } y = 1200$$

Namun ini belum selesai karena nilai  $x > 0$  dan  $y > 0$

$$y > 0$$

$$1200 - 12k > 0$$

$$13k < 1200$$

$$k < 92 \frac{4}{13}$$

$$x > 0$$

$$-3400 + 7k > 0$$

$$37k > 3400$$

$$k > \left(\frac{3400}{37}\right)$$

$$k > 91 \frac{33}{37}$$

$$91 \frac{33}{37} < k < 92 \frac{4}{13}$$

$$k = 92$$

Maka hanya ada satu solusi  $k = 92$

$$y = 1200 - 13 \cdot 92 = 4$$

$$x = -3400 + 37 \cdot 92 = 4$$

Permasalahan pada aplikasi persamaan Diophantine Linier dapat secara mudah dilakukan dengan menggunakan algoritma Euclid. Untuk menyelidiki apakah persamaan tersebut diophantine atau tidak, dapat dilakukan dengan dengan penghitungan FPB. Variabel  $a$  dan  $b$  dari persamaan  $ax + by = c$  yang mana  $(a, b) | c$ . Pada

penghitungan  $FPB(a, b)$  didapat  $d | c$ , sehingga  $ax + by = c$  memiliki solusi bulat.

### Simpulan

Berdasarkan analisis hasil dan pembahasan yang telah dibahas Persamaan diophantine Linier dapat diaplikasikan dalam materi program Linier dua variabel yang diajarkan di tingkat SMP dan SMA, dengan algoritma Euclid persamaan Linier dengan syarat  $(a, b) | c$  dapat dipenuhi yang kemudian dapat dilanjutkan langkah pembalikan algoritma euclid untuk menemukan solusi bulat.

### Daftar pustaka

- Al-Kubro, P. B. (2019). *Model Persediaan dengan Economic Production Quantity (EPQ) Multi Items dan Goal Programming.*(Studi Kasus: Palm Snacks & Cookies, Malang). Universitas Brawijaya.
- Christidamayani, A. P., & Kristanto, Y. D. (2020). The Effects of Problem Posing Learning Model on Students' Learning Achievement and Motivation. *Indonesian Journal on Learning and Advanced Education (IJOLAE)*, 2(2), 100-108. <https://doi.org/10.23917/ijolae.v2i2.9981>
- Darmawan, E. W., & Suparman, S. (2019). Design of Mathematics Learning Media based on Discovery Learning to Improve Problem Solving Ability. *Indonesian Journal on Learning and Advanced Education (IJOLAE)*, 1(2), 20-28.



- <https://doi.org/10.23917/ijolae.v1i2.7564>
- Dewi, L. P., & Rahmawati, N. D. (2022). Ethnic-Math Hots Pada Kue Kering Homemade Iedul Fitri 1443 Hijriah. *Jurnal Cartesian (Jurnal Pendidikan Matematika)*, 1(2), 85–90. <https://doi.org/10.33752/cartesian.v1i2.2525>
- Everest, G., & Ward, T. (2005). *An Introduction to Number Theory* (Vol. 232). Springer Science & Business Media.
- Hardini, R. M., Prahmana, R. C. I., Akib, I., & Shahrill, M. (2021). Learning Social Arithmetic of Low-Ability Student through the Context of Snacks and Money. *Indonesian Journal on Learning and Advanced Education (IJOLAE)*, 4(1), 21–33. <https://doi.org/10.23917/ijolae.v4i1.14308>
- Ishartono, N., Razak, R. binti A., Halili, S. H. binti, Ningtyas, Y. D. W. K., Tonra, W. S., Kholid, M. N., Waluyo, M., & Djamilah, S. (2023). The Role of Instructional Design in Improving Pre-Service and In-Service Teacher's Mathematics Learning Sets Skills: A Systematic Literature Review in Indonesian Context. *Indonesian Journal on Learning and Advanced Education (IJOLAE)*, 5(1), 13–31. <https://doi.org/10.23917/ijolae.v5i1.20377>
- Ishartono, N., Ulya, N. H. A. U., Sidiq, Y., Kholid, M. N., Ningtyas, Y. D. W. K., Kartini, N. H., & Oktatama, Firlana, B. (2023). Peningkatan Keterampilan Guru dalam Mengajarkan Matematika Berbasis Model Project-Based Learning Terintegrasi Pendekatan. *Buletin KKN Pendidikan*, 5(2), 107–117. <https://doi.org/10.23917/bkkndi.k.v5i2.22899>
- Kristanti, I., Mashuri, A., & Pradana, O. R. Y. (2021). Analisis Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Operasi Aljabar Siswa Kelas VII. *ANARGYA: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 5(2), 162–166. <https://doi.org/10.24176/anargya.v5i2.7900>
- Lestari, M. W., Rahmadhani, I. N., Huda, M., Na'im, H., Kusuma, R. A., & Munahefi, D. N. (2023). Pengembangan Media Pembelajaran Poster Berbasis Literasi dan Numerasi di SDN 3 Krakitan. *Jurnal Ilmiah Kampus Mengajar*, 3(1), 88–97. <https://doi.org/10.56972/jikm.v3i1.88>
- Prabandari, R. S., Masduki, M., Khotimah, R. P., & Sutarni, S. (2022). Analisis Kesalahan dalam Menyelesaikan Soal Persamaan Linier Satu Variabel Berdasarkan Kriteria Kesalahan Watson pada Siswa Kelas VII Semester Gasal. *Jurnal Keilmuan Dan Keislaman*, 1(1), 1–12. <https://doi.org/10.23917/jkk.v1i1.7>
- Pradana, Y. A., Azka, D. A., Aji, A. C., & Fauzi, I. M. (2022). Analysis of Weather Changes for Estimation of Shallot Crops Fluctuation Using Hidden Markov. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 16(1), 333–342.
- Rahmawanti, K., Sundari, S., Ishartono, N., & Waluyo, M. (2021). Penggunaan Kartu Perkalian sebagai Media Pembelajaran Matematika di Masa Pandemi. *Buletin KKN Pendidikan*, 3(2), 135–143.





- <https://doi.org/10.23917/bkkndi.k.v3i2.15697>
- Setyaningsih, E., Agustina, P., Anif, S., Ahmad, C. N. C., Sofyan, I., Saputra, A., Salleh, W. N. W. M., Shodiq, D. E., Rahayu, S., & Hidayat, M. L. (2022). PBL-STEM Modul Feasibility Test for Preservice Biology Teacher. *Indonesian Journal on Learning and Advanced Education (IJOLAE)*, 4(2), 118-127.  
<https://doi.org/10.23917/ijolae.v4i2.15980>
- Subiono. (2016). *Aljabar : Sebagai suatu Pondasi Matematika*. Jurusan Matematika ITS.
- Sukirman. (2006). *Pengantar Teori Bilangan*. Hanggar Kreator.
- Sulistyaningrum, R., Utama, S., & Desstya, A. (2021). Analysing Skills of Planning, Conduct, and Assessment In Teachers During Online Mathematics Teaching. *Profesi Pendidikan Dasar*, 8(1), 63-74.  
<https://doi.org/10.23917/ppd.v8i1.13108>